TEMA 1

CONCEPTO DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS. TIPOLOGÍA.

1.1. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Se define como la familia de variables aleatorias (v.a) que representan el estado del sistema, en el momento del tiempo T.

El conjunto de valores que puede tomar la variable aleatoria se llama "espacio de estados" (espacio muestral) y se denota por "E". El conjunto de valores que pueden tomar el índice i se le denomina "espacio paramétrico" y se denota por "T"

Definimos una variable aleatoria:

Ω: conjunto de resultados de un fenómeno aleatorio.

ω: sucesos elementales de Ω

A cada suceso elemental ω se le asocia una función del t $\xi(\omega,t)$

En función de los distintos valores que tomen ω y t tendremos diferentes modelos

1.2. TIPOLOGÍA DE PROCESOS ESTOCASTICOS

Según sea T tenemos:

1.2.1. Si T se fija en un punto, ξt es una variable aleatoria unidimensional.

1.2.2. Si T es un conjunto finito, $T= t_1, t_2,\ldots,t_n$ entonces $\xi = \xi_1, \xi_2,\ldots, \xi_n$ es una variable aleatoria n-dimensional.

1.2.3. Si T = N conjunto Infinito numerable, entonces $\xi = \xi_1,\xi_2,\ldots, \xi_n$ sucesión de variables aleatorias Proceso estocástico en tipo discreto.

1.2.4. Si T = 1 conjunto Infinito no numerable el proceso estocástico es del tipo continuo no numerable.

Por tanto un Proceso estocástico se identifica con una sucesión de variables aleatorias donde el subíndice indicará el instante de tiempo/espacio correspondiente.

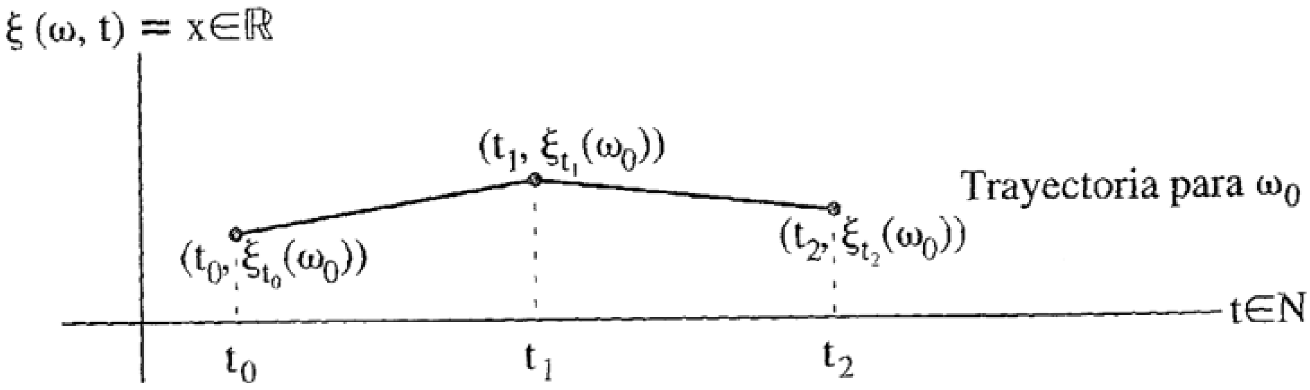
El modelo matemático que representa al concepto de proceso estocástico nos servirá para estudiar los factores aleatorios en un ambiente cambiante. Los valores de la variable aleatoria dependerán de un parámetro ("t" habitualmente será el tiempo) que hará que los valores de la variable aleatoria varíen.

Esta idea se puede generalizar si el tiempo se mide a través de una variable aleatoria continua.

Para que un proceso estocástico esté completamente definido hay que determinar totalmente las variables aleatorias, es decir, conocer la distribución de probabilidad asociada a cada una de ellas, y la distribución conjunta de todas ellas.

El subíndice "t" será el indicativo del tiempo y "Xt" el estado o posición del proceso estocástico en el instante t.

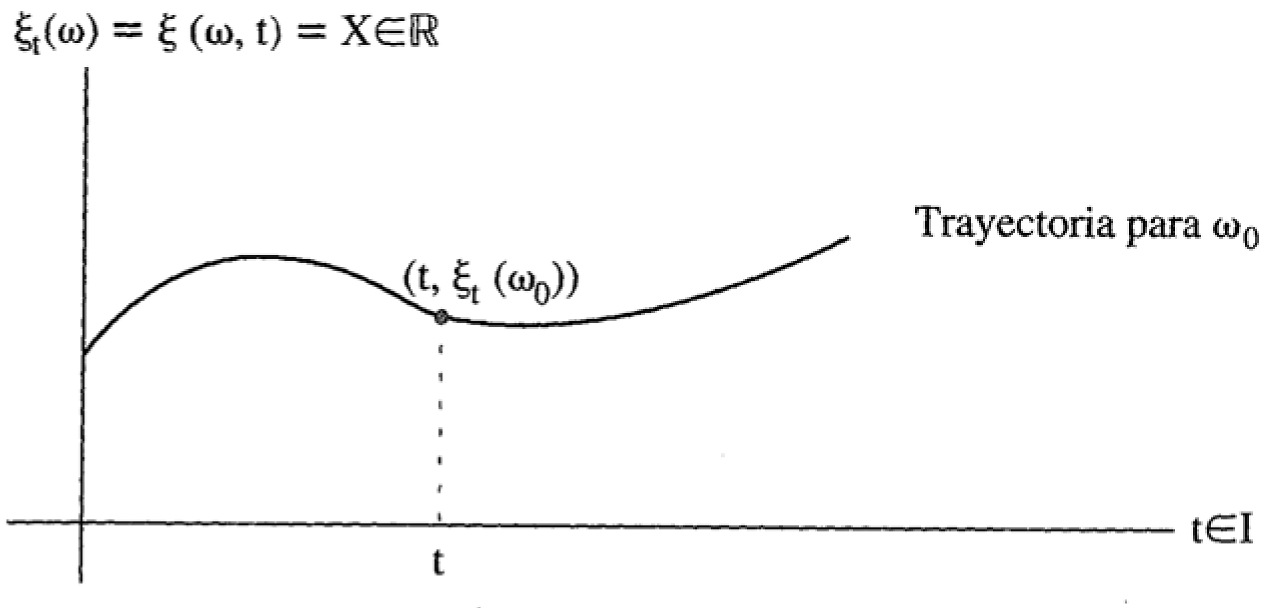
PROCESO ESTOCÁSTICO EN TIEMPO DISCRETO.



Las trayectorias se describirán con los puntos (t, f(t)), siendo $\xi(\omega_0, t) = \xi t\ (\omega_0) = f(t)$.

Fijado ω, recorremos t, mediante la función f (t)

PROCESO ESTOCÁSTICO EN TIEMPO CONTINUO.



Las trayectorias serían: $\xi_t(\omega) = \xi(\omega,t)$

1.3. CLASIFICACIÓN DE LOS PROCESOS ESTOCASTICOS

El espacio de estados “E = Ω” puede ser continuo o discreto y el espacio paramétrico “T” puede ser continuo o discreto

Ω=E \ T	Discreto	Continuo
Discreto	Serie estocástica con espacio de estados discreto **(1)** **CADENA**	Proceso estocástico con espacio de estados discreto **(2)** **PROCESO PUNTUAL**
Continuo	Serie estocástica con espacio de estados continuo **(3)** **SUCESION DE V.A.**	Proceso estocástico con espacio de estados continuo **(4)** **PROCESO CONTINUO**

Ejemplos

1. Cadena. Proceso: X_t = estado en el que se encuentra un sistema eléctrico, (con tres posibles posiciones una vez que es comprobado diariamente: correcto, incorrecto o deteriorado), el día “n”. **(Cadenas de Markov)**

2. Proceso puntual. Numero de personas que esperan para realizar su facturación en un vuelo en un instante t. (se plantean estudios sobre como reducir el numero de personas en espera). **(Procesos de Poisson)**

3. Sucesión de v.a. Producción diaria de un cierto refresco para maximizar los beneficios empresariales, reduciendo los costes de almacenaje, **….. (Modelos de series temporales)**

4. Proceso continuo. Tiempo de espera de una persona tarda en ser atendido al comprar unas entradas vía web, en instante t**…(Teoría de colas)**

Uno de nuestros objetivos será construir modelos que nos permitan explicar la estructura de una variable a lo largo del tiempo, con el fin de prever su evolución por lo menos a corto plazo.

Estas variables pueden ser de muy diversos tipos:

- Económicas: I.P.C., P.I.B., demanda de un producto.
- Sociales: nacimientos, defunciones, esperanza de vida, intención de voto a un determinado partido político

En la vida real se producen diferentes relaciones entre las v.a. que constituyen un Proceso Estocástico. Por ejemplo los nacimientos ocurridos en t, dependerán de los ocurridos en (n-25).

Clasificación de los procesos estocásticos según sean las propiedades probabilísticas seguidas por las v.a.:

1. Procesos estacionarios.
2. Procesos Markovianos.
3. Procesos de incrementos independientes.

Al estudiar un **FACTOR ALEATORIO**, la variable aleatoria (ξ) toma los posibles valores del factor aleatorio en un momento determinado, fijo de antemano.

1.4. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DEL PROCESOS

Para conocer el comportamiento probabilístico de las infinitas v.a. del proceso, Kolmogorov demuestra que basta con conocer las distribuciones de cualquier número finito de esas variables.

Para ello, consideremos n valores de T: t_1, t_2,… t_n. Supongamos la v.a. n-dimensional {ξ (t_1), ξ (t_2), … ξ (t_n)} y su función de distribución:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n\right) = P\left(\xi\left(t_1\right) \le x_1, \xi\left(t_2\right) \le x_2, \ldots, \xi\left(t_n\right) \le x_n\right)$$

Cuando se conoce esta función de distribución, para cualquier n, decimos que se conoce la distribución de probabilidad del proceso.

Función de distribución de primer orden v.a. Unidimensional $F\left(x; t_i\right) = P\left(\xi\left(t_i\right) \le x\right)$

Función de distribución de segundo orden v.a. Bidimensional $F\left(x_i, x_j; t_i, t_j\right) = P\left(\xi\left(t_i\right) \le x_i, \xi\left(t_j\right) \le x_j\right)$

MOMENTOS DE LAS DISTRIBUCIONES

DE PRIMER ORDEN

Media: $E(\xi_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot dF(x,t) = \alpha(t)$ es una función de t.

Varianza: $V(\xi_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \alpha(t))^2 \cdot dF(x,t) = \sigma^2(t)$ es una función de t.

DE SEGUNDO ORDEN

Covarianza

$$\gamma(t_i,t_j) = E\left[\left(\xi_{t_i} - \alpha(t_i)\right)\left(\xi_{t_j} - \alpha(t_j)\right)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_i - \alpha(t_i)\right)\left(x_j - \alpha(t_j)\right) \cdot dF(x_i,x_j;t_i,t_j)$$

Función de correlación lineal, se obtiene con los momentos anteriores, $\rho(t_i,t_j) = \dfrac{\gamma(t_i,t_j)}{\sigma(t_i)\cdot\sigma(t_j)}$

1.5. PROCESOS ESTACIONARIOS

Estos procesos puede diferenciarse en:

1.5.1. Proceso estacionario en sentido estricto:

Un P.E. es estacionario en sentido estricto si, al realizar un cambio de origen T, la función de distribución no cambia.

$$F_{t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n) = F_{t_1+h,t_2+h,\ldots\ldots,t_n+h}(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$$

1.5.2. Proceso estacionario en sentido amplio o débilmente:

Un P.E. es estacionario en sentido amplio si la estacionariedad (si tiene momentos de primer y segundo orden finitos y que no varían en función del tiempo) afecta sólo a los momentos y no a la función de distribución.

1.6. PROCESOS MARKOVIANOS

Se caracterizan porque las distribuciones de X_{n+1} sólo dependen de la distribución X_n y no de las anteriores, es decir, X_{n-1} , X_{n-2} , …….

$$F(x_n / x_1,x_2,\ldots\ldots,x_{n-1}) = F(x_n / x_{n-1})$$

Como el estado futuro del proceso, sólo depende del estado presente, y no del pasado, a estos procesos se le conoce como POCESOS SIN MEMORIA.

1.7. PREGUNTAS TIPO TEST

1. ¿Qué es el modelo matemático de un proceso estocástico?

a) Al modelo matemático que relaciona la variable aleatoria con el paso del tiempo.
b) Al modelo matemático que relaciona la variable aleatoria en un instante determinado del tiempo.
c) Al modelo matemático que relaciona los resultados de la variable aleatoria en cada punto del tiempo.
d) Todas las afirmaciones son correctas.

2. Un proceso estocástico o estadístico es:

a) La familia de variables aleatorias que representan el estado del sistema en momento del tiempo T.
b) La familia de variables aleatorias discretas que representan el estado del sistema en el momento del tiempo.
c) La familia de variables aleatorias continuas que representan el estado del sistema en el momento del tiempo.
d) Ninguna de las anteriores.

3. Los procesos estocásticos con E "espacio de estados" discreto y T "espacio paramétrico" discreto se denominan:

a) Cadenas o Cadenas de Markov.
b) Proceso Puntual o Proceso de Poisson.
c) Sucesión de variables aleatorias o Modelos de series temporales.
d) Procesos continuos o Teoría de Colas.

4. Los procesos estocásticos con E "espacio de estados" continuo y T "espacio paramétrico" discreto se denominan:

a) Cadenas o Cadenas de Markov.
b) Proceso Puntual o Proceso de Poisson.
c) Sucesión de variables aleatorias o Modelos de series temporales.
d) Procesos continuos o Teoría de Colas.

5. Los procesos estocásticos con E "espacio de estados" continuo y T "espacio paramétrico" continuo se denominan:

a) Cadenas o Cadenas de Markov.
b) Proceso Puntual o Proceso de Poisson.
c) Sucesión de variables aleatorias o Modelos de series temporales.
d) Procesos continuos o Teoría de Colas.

6. Los procesos estocásticos con E "espacio de estados" discreto y T "espacio paramétrico" continuo se denominan:

a) Cadenas o Cadenas de Markov.
b) Proceso Puntual o Proceso de Poisson.
c) Sucesión de variables aleatorias o Modelos de series temporales.
d) Procesos continuos o Teoría de Colas.

7 Un proceso es estrictamente estacionario si:

a) No permanece invariante ante cualquier traslado temporal y las características del proceso no se ven afectadas.
b) Si permanece invariante ante cualquier traslado temporal y las características del proceso si se ven afectadas.
c) Permanece invariante ante cualquier traslado temporal y las características del proceso no se ven afectadas.
d) Ninguna de las anteriores.

8 Un proceso es débilmente estacionario si:

a) La estacionariedad afecta a los momentos y a la Función de distribución.
b) La estacionariedad no afecta a los momentos y si a la Función de distribución.
c) La estacionariedad solo afecta a los momentos y no a la Función de distribución.
d) Ninguna de las anteriores.